

صفوف المجموعات

عناصر المجموعات :  $x, y, z$  --  $a, b, c$

المجموعات :  $A, B, C, X, Y, Z$

صفوف المجموعات  $A, B, C, \dots, X, Y, Z$

(عناصر صفوف المجموعات هي مجموعة جزئية من مجموعة مفروضة)  
مثلاً :

إذا كانت  $X \neq \emptyset$  مجموعة ما

فترصد  $Z^X$  أو  $P(X)$  لصف المجموعات الجزئية من  $X$  سبب مجموعة جزئية من  $Z^X$

منها صف جزئي من  $X$  من  $X$  إذا كانت  $A \subset X$  فنكتب  $A \in Z^X$

ثم سبب المثال لناخذ المجموعة  $X = \{a, b, c\}$  فيكون

$$Z^X = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X \}$$

$$Z_1 = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\} \} \subset Z^X$$

$$Z_2 = \{ X \} \subset Z^X$$

$$Z_3 = \{ \emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\} \} \subset Z^X$$

$$Z_4 = \{ \{a\} \}$$

صفوف المجموعات

١ - نصف الحلقة ونصف الجبر

نرضى  $X$  مجموعة غير خالية ونرضى  $Z^X$  لصف سبب المجموعات الجزئية من  $X$   $S \subset Z^X$

نعرف : لكن  $S$  صفاً جزئياً من  $Z^X$

فما  $S$  نصف حلقة مع  $X$  إذا تحققت ما يلي :

① إذا كانت  $A, B \in S$  فإن  $A \cap B \in S$

② إذا كانت  $A, B \in S$  فتوجد مجموعتان منفصلتان  $C_1, C_2$  من  $S$  من

$$A \cap B = \bigcup_{i=1}^n C_i \quad C_1, C_2, \dots, C_n \text{ يجب أن يكون}$$

ملاحظة :

إذا كانت  $C_1, C_2, \dots, C_n$  مجموعتان مفروقتان فترصد

$$C_1 \cap C_2 = \emptyset, C_1 \cup C_2 = C_3 \text{ ولكن إذا كانت المجموعات } C_1, C_2 \text{ منفصلة}$$

$$C_1 + C_2 + C_3 = \bigcup_{i=1}^n C_i \text{ من الممكن}$$



تعريف: نصف التبر هو نصف حلقة فيما  $X$

خواصها:

- ① إذا كانت  $A_i \in S$  و  $A_1, A_2, \dots, A_n \in S$  (نصف حلقة) فإن  $\bigcap_{i=1}^n A_i \in S$
- ② المجموعة  $S$  هي مجموعة طوبولوجية  $\emptyset \in S$  وذلك إذا  $A = B$  في نصف حلقة فيكون  $C_i \in S$  :  $C_i = A/A$    
 وبذلك  $\emptyset \in S$

الملاحظة:

① النصف  $S_1 = \{\emptyset, X\}$  شكل نصف حلقة في كل مجموعة  $X$  لأن

$$\emptyset \cap X = \emptyset \in S_1$$

$$\emptyset / X = \emptyset = \emptyset_{S_1} + \emptyset_{S_1}$$

$$X / \emptyset = X = X + \emptyset$$

أي أن  $S_1$  نصف حلقة على  $X$  كما أن  $S_1$  نصف صير على  $X$  كان  $X \in S_1$

② النصف  $S \neq \emptyset$  شكل نصف حلقة على  $X$

وهو نصف صير

لنأخذ المجموعة  $X = \mathbb{R}$  مجموعة الأعداد الحقيقية والنصف

$$S = \{ \emptyset, \mathbb{R}, [a, b[ \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

فقط أن  $S$  شكل نصف حلقة  $\mathbb{R}$  كان

$$\text{① إذا كانت } [a, b[ \in S \text{ و } [c, d[ \in S \text{ و } [e, f[ \in S$$

$$\text{فإن } [a, b[ \cap [c, d[ = [a, \min(b, d)[ \in S$$

$$[a, b[ \cup [c, d[ = [a, \max(b, d)[ \in S$$

$$[a, b[ \cap [c, d[ = \emptyset$$

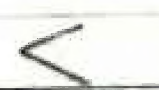
$$\text{② } [a, b[ \cap [c, d[ = \emptyset \text{ و } [a, b[ \cup [c, d[ = [a, b[ \cup [c, d[ \in S$$

$$= [a, b[ \cup [c, d[ \in S$$

$$[a, b[ \cup [c, d[ \in S$$

$S$  نصف حلقة على  $\mathbb{R}$  لكن  $S$  ليس نصف صير لأن  $\mathbb{R} \in S$    
  $R = \{ \dots, -\infty \}$

③ كل ما الصغوف الذاتية الشكل نصف حلقة على  $R$





$$S_1 = \{ [a, 0] \mid a \in \mathbb{R} \}$$

$$S_2 = \{ [a, 1] \mid a \in \mathbb{R} \}$$

$$S_3 = \{ [a, 0] \mid a \in \mathbb{R} \}$$

(5) لتأخذ المجموعة  $X = \mathbb{R}^n$ ، حيث  $n$  هو عدد

$$S = \{ [x] \mid [a, 0], [a, 1] \mid a \in \mathbb{R} \}$$

فقدان  $\mathbb{R}$  حيث حلقة  $\mathbb{R}$

$$X = \{ [a, 0], [a, 1] \mid a \in \mathbb{R} \}$$

وهو صواب الديكارتي للمجموعات المذكورة.

ملاحظة الجاء الديكارتي لمجموعة غير خالية  $X$

هو تباين مرتبة له، أي  $X \times Y \neq Y \times X$

$$X \times Y = \{ (x, y) \mid x \in X, y \in Y \}$$

ملاحظة هامة

إذا كانت  $S$  حلقة على  $X$  وكانت  $A, B \subseteq X$  فبالضرورة

$$A \cup B \in S$$

مثال في المثال (3) فإن المجموعات  $S \ni A = \{1, 3\}$

$$S \ni B = \{5, 10\}$$

$$A \cup B = \{1, 3, 5, 10\} \notin S$$

بما

(2) الحلقة الأكبر

فيما يلي نبدأ  $X$  مجموعة غير خالية (مجموعة)  $2^X$  حيث المجموعات الجزئية لـ  $X$

$$R \subseteq 2^X \text{ (أي } R \subseteq 2^X \text{)}$$

نقول: نقول أن  $R$  يشكل حلقة على  $X$  إذا تحققت الشروط التالية:

$$(1, 2) \quad A \cup B \in R \quad \text{إذا كانت } A, B \in R$$

$$(2, 2) \quad A \cap B \in R \quad \text{" " " "}$$

و



إذا كان  $R$  نصف حلقة  $X$  وكان  $X \in R$  فنقول ان  $R$  يشك  
جزء  $X$ .

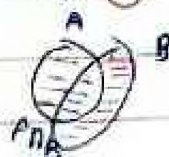
خواص: نفرض ان  $R$  نصف حلقة  $X$

(1)  $\emptyset \in R$  و  $\emptyset \in R$  (22) باخذ  $A=B$  نجد

$$\emptyset = A \setminus A \in R$$

(3) إذا كان  $A, B \in R$  فإن  $A \cap B \in R$

$$A \cap B = (A \cup B) \setminus [(A \setminus B) \cup (B \setminus A)]$$



(4) إذا كانت  $A_1, A_2, \dots, A_n \in R$  فإن  $\bigcap_{i=1}^n A_i \in R$  و  $\bigcup_{i=1}^n A_i \in R$

(5) إذا كان  $A, B \in R$  فإن  $A \Delta B \in R$  (الفرض السابق) لأن

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

أمثلة:

فيعالاي نفرض ان  $X$  مجموعة غير خالية.

(1) الصف  $R = \{\emptyset, X\}$  يشك حلقة ومجموعة  $X$  مع  $X$

(2) الصف  $R = \{\emptyset, X, A, A^c\}$  حيث  $A \subset X$  يشك حلقة ومجموعة  $X$

(3)  $A = X$  يشك مجموعة  $X$

(4) لكن الصف  $R = \{\emptyset, A, X\}$  حيث  $A \subset X$  (أعني) هل يشك حلقة؟  
جواب  $X$ ؟

$$\emptyset \cup A = A \in R \quad (12)$$

$$\emptyset \cup X = X \in R$$

$$A \cup X = X \in R$$

$$\emptyset \setminus A = \emptyset \in R$$

$$\emptyset \setminus X = \emptyset \in R$$

$$X \setminus \emptyset = X \in R$$

$$X \setminus A = A^c \notin R$$

$R = \{\emptyset, A, X\}$  يشك حلقة وبالتالي  $X$  يشك



### 3 - الصف و صف الجبر

فيما يلي نقرأ أن  $X$  مجموعة غير خالية و  $X$  صف المجموعات الجزئية من  $X$  وليكن  $\mathcal{C}$  صفاً جزئياً من  $X$  (أي  $\mathcal{C} \subseteq X$ )

**تعريف:**

نقول أن الصف  $\mathcal{C}$  ينكسر  $X$  - حلقة من  $X$  إذا تحققت ما يلي:

1- إذا كان  $A, B \in \mathcal{C}$  فإن  $A \cap B \in \mathcal{C}$

2- إذا كان  $A \in \mathcal{C}$  فإن  $A^c \in \mathcal{C}$

3- إذا كان  $\mathcal{C}$  حلقة من  $X$  فإن  $X \in \mathcal{C}$  نفس الشيء  $\mathcal{C} \subseteq X$  جبر من  $X$ .

**خواص:** فيما يلي نقرأ أن  $\mathcal{C}$  حلقة

1-  $\emptyset \in \mathcal{C}$

2- إذا كانت  $A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{C}$  فإن  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{C}$  لأن:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap \left[ \bigcup_{i=2}^{\infty} (A_1 \cap A_i) \right]$$

البيان موجود في الكتاب

3- إذا كان  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$  جبر فيكون:

مثلاً  $A \in \mathcal{C}$  فإن  $A \in \mathcal{D}$  لأن  $X \setminus A = A^c \in \mathcal{C}$  سمى أن:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \right)^c \in \mathcal{C}$$

**ملاحظة:**

1- حلقة من الصف  $\mathcal{C}$  هي صف حلقة لكن العكس غير صحيح في الحالة العامة

حلقة هو صف جبر لكن العكس غير صحيح

2- حلقة من الصف  $\mathcal{C}$  هي صف حلقة لكن العكس غير صحيح

حلقة من جبر هو جبر لكن العكس غير صحيح

3- صف وتكن والصف المضرد

فيما يلي نقرأ أن  $X$  مجموعة غير خالية و  $X$  صف المجموعات الجزئية من  $X$  وليكن  $\mathcal{D}$  صفاً جزئياً من  $X$  (أي  $\mathcal{D} \subseteq X$ )

$\mathcal{D}$  صفاً جزئياً من  $X$  (أي  $\mathcal{D} \subseteq X$ )

**تعريف:**

نقول أن الصف  $\mathcal{D}$  ينكسر  $X$  - صف وتكن من  $X$  إذا تحققت ما يلي:

1-  $X \in \mathcal{D}$



٢- إذا كانت  $A \in D$  نجد  $A \in B$  فإن  $B \in D$   
 ٣- إذا كان  $A_1, A_2, \dots, A_n \in D$  ونفرض  $A = \bigcap_{i=1}^n A_i$  فإن  $A \in D$   
 خواص: نتردد  $D$  صفاً وتكون

- (١)  $\emptyset \in D$  وسدك  $A^c = X \setminus A \in D$   
 (٢) كل  $A \in D$  هو صفاً وتكون  $A^c$  العكس غير صحيح في الحالة العامة.  
 (٣) صفاً

صفاً وتكون  $D$  تكون  $A \in D$  - جراً إذا وفقط إذا كان  $A$  بالصفة لتقاطع المنتهية  
 (هذا يعني أنه  $A_1, A_2, \dots, A_n \in D$  فإن  $A = \bigcap_{i=1}^n A_i \in D$ )  
 انظر على صفاً  $D$  وتكون

- (١) سداً  $A \in D$  - جراً هو صفاً وتكون  $A^c$  بالصفة  
 (٢) لنأخذ المجموعة  $D = \{ \emptyset, A, A^c, X \}$   
 فنجد أن  $D$  صفاً وتكون  $A \in D$  لكن  $A^c \notin D$  - جراً لا يكون  $D$  صفاً

(٣) لنأخذ المجموعة  $D = \{ \emptyset, A, A^c, X \}$  و  $A \in D$  و  $A^c \in D$  و  $X \in D$  و  $\emptyset \in D$   
 فنجد أن  $D$  صفاً وتكون  $A \in D$  و  $A^c \in D$  و  $X \in D$  و  $\emptyset \in D$   
 الصفاً المطرد

تعريف: نقول  $M$  متتالية مجموعيات  $\{A_n\}$  متتالية  
 $P$  متزايدة إذا كانت

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$$

ب متتالية إذا كان

• سداً متتالية متزايدة أو متناقصة نسبيًا متتالية متزايدة  $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \dots$   
 • لذلك  $X$  مجموعة غير خالية و  $\emptyset$  صفاً سداً مجموعيات الترتيبية  $X$   
 • ولكن  $M$  صفاً "متتالية" صفاً (أي  $M \subset M$ )  
 تعريف: الصفاً المطرد

نقول أن  $M$  متتالية متزايدة  $X$  إذا كانت



- من اجل كل متتالية متزايدة  $\{A_n\}$  من عناصر  $M$  (اي  $A_n \in M$ ) فإن  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in M$   
 - من اجل كل متتالية متناهية متزايدة  $\{B_n\}$  من عناصر  $M$  (اي  $B_n \in M$ ) فإن  $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in M$
- أمثلة:**

- 1-  $\mathbb{R}$  - حلقة في صف عظم
- 2-  $\mathbb{R}$  - حلقة في صف عظم
- 3-  $\mathbb{R}$  - حلقة في صف عظم

**نص 1:**

اننا ان كل حلقة  $R$  في صف عظم  $X$  لكن العكس غير صحيح

**الحل:** لنكن  $R$  حلقة  $X$  هذا يعني ان:

- ①  $A \cup B \in R$  و  $A, B \in R$
- ②  $A \cap B \in R$  و  $A, B \in R$
- ③  $A \setminus B \in R$  و  $A, B \in R$

وهذا هو الشرط الاول في تعريف نصف الحلقة

لذلك  $A \setminus B = C \in R$  فنفحص ان:

$$A \setminus B = C + \emptyset$$

وهذا يعني ان الشرط الثاني من تعريف نصف الحلقة يتحقق ايضا.

لذلك فان  $R$  نصف حلقة  $X$

في نشان العكس يعني زكري مثال

وجدنا ان الصف  $\{A \in \mathcal{P}(S) : A \cap B \in R\}$  هو نصف حلقة  $R$  وناحية المجموعتين

$$A = \{1, 3\} \text{ و } B = \{5, 6\} \in S$$

فنفحص ان  $A \cup B = \{1, 3, 5, 6\} \notin R$  لان  $R$  لا ليس حلقة  $R$

**نص 2:**

اننا ان نصف الحلقة تكون حلقة  $X$  اذا كانت مغلقة بالسمت  $\mathbb{R}$  المنتهى

**الحل:**

لنكن  $S$  نصف حلقة  $X$  فنفحص الشرط

$$A \setminus B \in S \Rightarrow A \cup B = S$$





$$A/B = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C, \quad C_i \in \mathcal{C}$$

نتيجة:  $\left. \begin{array}{l} \text{في نقطة حلوية} \\ + \\ \text{في نقطة بالأسية لا يوجد منه} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{في حلوية}$

$$\mathcal{H} = \{A \mid A \subseteq \mathbb{N} : \text{شماره اول در } A\}$$

11

① لنرى  $A \cap B \subset A$  هذا البديهى ان  $B, A$  مجموعتين غير خاليتين على الاقل. لذلك يكون  $(A \cup B)$

(ج) ایمان  $(A/B)$  غیر محدود طرزاً کہہ سکتے ہیں  $(A/B) \in \mathbb{N}$

H-1 ملحق 2

الآن لنكن  $\in H$   $A_1, A_2, \dots, A_n$  هذه التي أن سوا المجموعات  $A_i$  مفردة تلك الأ ستر

$$(U, A_i) \in \mathcal{H}$$

ويعا أن  $N$  هي مجموعة محدودة فإن  $N \in \mathcal{F}$

⇒ في غير (التي حلتها) و- غير (التي حلتها - ملوثة)



نبرهن: لنفرض  $A$  مجموعة لا نهائية من الأعداد الطبيعية وليكن  $K$  الصف

$$K = \{A, C, W, \dots, A\}$$

هل  $K$  يشكل حلقة؟ إذا كانت حلقة، فما هي خواصها؟